LES CLOCHES DIATONIQUES : UN ATLAS VISUEL ET SONORE DES MODES MICROTONAUX

Julien Junod
tFSc!
jjunod@tfsc.ch

RÉSUMÉ

La cloche diatonique est une carte complète des échelles et des modes heptatoniques. Cette représentation graphique, systématique et synthétique, des modes musicaux se laisse généraliser à d'autres tempéraments que la division habituelle de l'octave en 12 notes. Elle permet de constituer un atlas de cartes géographiques des modes dans différents contextes macro- et microtonaux. Les cinq millions et demie de modes que recense cet atlas peuvent être visualisés et écoutés en ligne.

L'absence de consensus autour de la notation et de la forme à donner aux instruments à touches ou clefs fixes complique l'exploration de la musique microtonale. Dans notre atlas, nous avons choisi de généraliser un dispositif bien établi, à savoir le clavier du piano. Ceci confère un caractère familier à la représentation graphique de modes nouveaux. De même, cet outil facilite l'écoute des modes en recourant à des sons dont le timbre est adapté à chaque univers sonore. Le caractère particulier de ces accordages se révèle alors moins surprenant pour des oreilles habituées aux 12 notes usuelles.

1. INTRODUCTION

Les échelles et les modes jouent un rôle important dans la théorie et la pratique du jazz. On peut les considérer comme un réservoir de notes disponibles pour la composition ou l'improvisation. Loin d'y voir une limitation à la liberté de création, ces contraintes créatives offrent l'avantage de présenter des systèmes éprouvés, et peuvent révéler des systèmes encore inconnus. Ces structures ne sont pas propres au jazz : on les trouve également hors de la tradition européenne, ou encore en musique classique, bien que le nombre de modes usuels y soit plus réduit. La pratique occidentale se concentre essentiellement sur six échelles heptatoniques comptant chacune 7 modes, pour un total de 42 modes (figure 1).

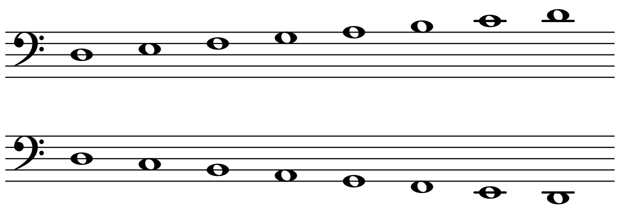

Figure 1. Le mode dorien, ou mode de *ré*, est l'un des sept modes de l'échelle diatonique. Celle-ci est constituée des notes *naturelles* (les touches blanches du clavier), comme le révèle l'absence de dièses ou de bémols. La structure intervallique du mode, notée 2–1–2–2–2–1–2 en demitons, est un palindrome, ce que reflète la symétrie entre les modes ascendant et descendant.

Le recensement d'ensembles de notes, tels que les forment les échelles ou les accords, a occupé de nombreux musiciens et musicologues. À titre d'exemple, citons le catalogue d'Allen Forte, destiné à l'analyse de la musique atonale [3], la liste établie par Elliott Carter pour le guider dans ses propres compositions [1], ou encore l'archive de motifs mélodiques du musicien de jazz Yusef Lateef [7]. Les deux premiers dressent une liste exhaustive tandis que le livre de Lateef documente plutôt la pratique courante des musiciens et ses propres explorations.

La question de l'existence d'autres modes, encore largement inutilisés, voire inconnus, a poussé le musicien Pierre Audétat à construire, à la main, la première cloche diatonique en 2006 (figure 2). Cette démarche de combinatoire géométrique lui a permis de dresser une carte complète des 462 modes des 66 échelles heptatoniques, et de constater que seuls 10 % des modes faisaient partie du répertoire habituel. Après avoir vérifié mathématiquement cette démarche expérimentale, l'auteur a établi un algorithme de production de cloches [6] aussitôt mis en oeuvre pour créer une seconde cloche dressant la carte des 462 modes pentatoniques.

1.1. Un atlas de modes

Le domaine de validité de cet algorithme ne se limitant pas aux tempéraments de 12 notes, cet article décrit comment l'auteur l'a appliqué à des tempéraments microtonaux pour constituer un atlas des modes consultable en ligne [1]. Ce site se veut une invitation à l'expérimentation musicale. Il offre des outils de repérage pour la navigation, de visualisation pour la compréhension des structures, et d'audition pour la découverte du potentiel musical de chaque mode.

Il regroupe plus de cinq millions et demie de modes répartis à travers 72 cartes [2], une pour chaque monde macro- ou micro-tonal. Nous appelons *monde* un contexte défini

[1] www.cloche-diatonique.ch, accédé le 19 octobre 2020.
[2] Le nombre de cartes possibles ne s'arrête pas à ce chiffre, mais la capacité de stockage du serveur impose cette restriction.

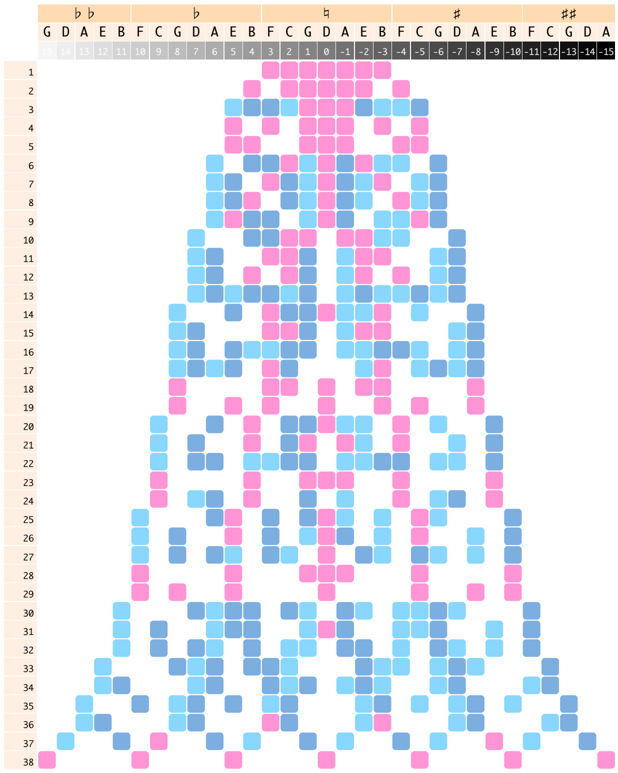

Figure 2. La cloche diatonique est une carte géographique des 66 échelles et des 462 modes heptatoniques. Chaque ligne représente une échelle, que l'on range par étalement croissant de ses modes sur la spirale des quintes, ce qui confère à la représentation sa forme caractéristique de cloche. Les paires d'échelles symétriques l'une de l'autre sont rangées sur une même ligne, et distinguées par deux nuances de bleu. Pour cette raison, le nombre de lignes est réduit à 38, soit le nombre de classes dihédrales (voir la section 2.2).

par une combinaison particulière de tailles d'octave et des échelles compatibles, comme par exemple les échelles de sept notes dans un octave divisée en douze notes. Une représentation graphique de la disposition des modes offre l'avantage d'être non seulement engageante, mais aussi d'exposer des relations entre modes qui illustrent naturellement le solfège, et, par extension, livrent des pistes pour l'exploration des modes inconnus.

1.2. Principes

L'atlas comprend des cartes pour toutes les divisions de l'octave, de cinq notes à vingt-quatre notes (les quarts de tons). Toutefois, on notera l'absence de certaines familles d'échelles. Ceci est dû au fait que la procédure de construction d'une cloche ne dépend que de deux paramètres : la division de l'octave et la taille des échelles, et que ceux-ci déterminent si les deux conditions suivantes, nécessaires à l'existence d'une cloche, sont réalisées :

1. L'existence d'une échelle *générée*, considérée comme la référence, et composée de notes qualifiées de *naturelles*.
2. Cette échelle doit être symétrique, et l'axe doit passer par l'une de ses notes, considérée comme la note de référence.

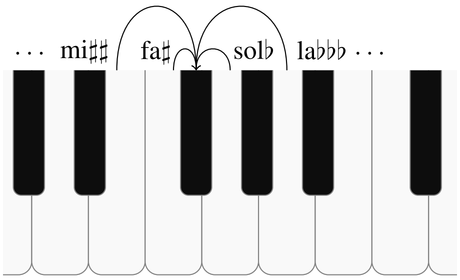

Figure 3. Le phénomène d'enharmonie illustré sur un clavier de piano. Une même note peut être décrite par une infinité de combinaisons de notes naturelles et d'altérations.

Chaque note du total chromatique peut être considérée comme le résultat de l'altération éventuelle d'une note naturelle, appartenant à l'échelle de référence. Ces transformations ne sont toutefois pas arbitraires. En suivant les critères précis exposés dans la section 2, ce choix particulier d'altérations, propre à chaque échelle, permet de comparer les échelles entre elles en observant les positions qu'occupent leurs notes sur la spirale (le cercle déroulé) des quintes (figure 4). On peut ainsi les classer de l'échelle la plus *naturelle* à la plus *altérée*. Dans ce contexte, toutes les notes et toutes les échelles ne se valent pas, comme c'est le cas dans la tradition de la combinatoire atonale [3]. On introduit un classement entre elles.

2. CONSTRUIRE LES CLOCHES

Les opérations d'altération ne sont pas uniques, mais le principe d'enharmonie les identifie si l'on a affaire à un tempérament égal (figure 3). En revanche, la spirale des quintes différencie chaque altération, et permet de faire la distinction entre les dièses et les bémols servant à définir chaque échelle.

L'utilité d'altérations multiples, comme par exemple les doubles dièses, n'est pas évidente dans un contexte heptatonique, dont les notes offrent une couverture assez dense du total chromatique. En revanche, avec des quarts de tons et des échelles de cinq notes par exemple, certaines des 19 notes du complément sont trop éloignées et ne peuvent être atteintes qu'en multipliant les altérations (figure 9).

2.1. Démarche empirique

En construisant pour la première fois une cloche diatonique à la main, Pierre Audétat a procédé par écartement progressif des échelles sur la spirale des quintes. Partant de l'échelle diatonique, l'ajout successif de dièses et de bémols conduit au cluster chromatique, qui comporte deux dièses, un double dièse, deux bémols et un double bémol (figure 6).

Chaque étape révèle une nouvelle combinaison, résultat d'un écartement supplémentaire de la dernière échelle trouvée. Tout dièse doit être compensé par autant de bémols, et il convient de choisir les altérations les plus économes en termes d'écartement de l'échelle sur la spirale des quintes : un *fa*♯ se situe à une distance de quatre quintes du ré, alors que le *si*♯ est éloigné de dix quintes.

On parcourt ainsi toutes les échelles possibles [3] d'un espace fini, constitué des douze notes de l'octave, mais en les décrivant dans l'espace infini de la spirale des quintes. Cette construction enrichit l'espace purement chromatique des classes de hauteurs de notes, abondamment étudiée dans le contexte de la musique atonale, de la spirale des quintes, base du solfège.

L'approche algorithmique proposée ici consiste à passer d'abord par le cercle chromatique, dont la combinatoire des sous-ensembles est bien connue, puis à suivre le chemin inverse de la projection π_7 décrivant le phénomène d'enharmonie, pour retrouver la position de l'échelle sur la spirale des quintes (figure 4). Comme la projection n'est pas injective, mais que la représentation doit être unique, il faut à chaque étape choisir un représentant dans le noyau infini de π_7.

2.2. Combinatoire chromatique

Énumérer toutes les échelles possibles revient à dresser la liste de tous les sous-ensembles d'une taille donnée, en tenant compte des équivalences usuelles en musique : transpositions et inversions.

Considérons un tempérament égal et une division de l'octave en $c \in \mathbb{N}$ notes. Associer deux notes distantes d'une octave conduit à modéliser cet espace *chromatique* par le groupe cyclique $\mathbb{Z}_c$, de taille finie c. Une échelle S de $d \in \{1, \ldots, c-1\}$ notes est vue comme un sous-ensemble de $\mathbb{Z}_c$ de taille d.

La pratique musicale identifie des échelles obtenues par transposition les unes des autres : *do* majeur, *ré* majeur, *mi* majeur, etc. Cette équivalence correspont à une opération de symétrie : l'action du groupe cyclique agissant sur lui-même par translation.

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{Z}_c \times \mathbb{Z}_c &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \\ (x, a) &\longmapsto \tau_a(x) = x + a \end{aligned} \tag{1}$$

Cette action définit des classes d'équivalence sur les sous-ensembles de $\mathbb{Z}_c$, que l'on peut compter à l'aide du théorème de dénombrement des configurations de Pólya [8]. Le nombre total de sous-ensembles de taille 7 dans un ensemble de 12 éléments s'élève à 792, mais la prise en compte d'équivalences par transposition réduit le nombre de choix possibles à 66. Un second groupe de symétrie servira à diminuer davantage la taille de la cloche diatonique. Il s'agit du groupe dihédral, qui ajoute les inversions aux transpositions, et engendre 38 classes d'échelles.

[3] Aux transpositions près. On parcourt en fait les classes d'équivalence du groupe cyclique.

2.3. Géométrie diatonique

Dans le tempérament habituel, le cercle chromatique est construit par incréments d'un intervalle élémentaire : le demi-ton. La spirale des quintes est construite, comme son nom l'indique, par quintes successives (figure 4). Cette propriété de pouvoir parcourir, dans un ordre différent, toutes les notes du total chromatique se manifeste lorsqu'un intervalle g est premier avec la taille de l'octave c :

$$g \in {\mathbb{Z}_c}^{\times} \iff \langle g \rangle = \mathbb{Z}_c. \tag{2}$$

L'empilement des quintes ne doit pas forcément s'arrêter après douze étapes. Et, si l'on empile des quintes justes, on ne retrouve en fait jamais une note équivalente par octaves au point de départ. Même si le cercle chromatique suggère un tempérament égal, nous maintenons cet aspect de l'espace *diatonique* de la spirale des quintes, considéré comme infini, en le modélisant à l'aide des nombres entiers $\mathbb{Z}$. Notons que parcourir la spirale à l'envers revient à suivre une spirale des quartes ($g = 5$).

Dans un contexte microtonal, il faut recourir à d'autres intervalles, choisis pour leur capacité à générer le total chromatique. N'importe quelle unité g de $\mathbb{Z}_c$ vu comme un anneau génère une telle *spirale*. En généralisant ce principe à d'autres divisions de l'octave $c \neq 12$, nous reproduisons systématiquement la situation rencontrée dans le cas des échelles heptatoniques, en prenant $g = d$, qui avait été préalablement restreint aux nombres premiers avec c.

Le cercle chromatique a une taille finie, alors que la spirale des quintes comporte une infinité d'éléments. La projection π_g replie la spirale en cycle des quintes (figure 4). C'est le phénomène d'enharmonie qu'on retrouve sur le clavier de piano (figure 3). Dans ces conditions, construire une représentation $\mathcal{S}$ de S sur $\mathbb{Z}$ revient à choisir un seul représentant $\mathcal{S}$ au sein de la préimage ${\pi_g}^{-1}(S)$.

2.4. Distance et transposition

La distance entre deux notes n'est pas la même dans les deux espaces, ce qui révèle une dualité chromatique / diatonique.

$$d_{\mathbb{Z}_c}(\pi_g(\xi), \pi_g(\xi + \Delta)) = d_{\mathbb{Z}_c}(0, g \cdot \Delta) \tag{3}$$

Ainsi, le plus petit pas diatonique $\Delta = 1$, correspondant à un pas de quinte dans le monde chromatique, envoie chaque classe de hauteur vers sa position la plus éloignée après le triton, soit à une distance de $d_{\mathbb{Z}_{12}} = 5$ demi-tons. Et à l'inverse, la simple altération d'un pas chromatique $d_{\mathbb{Z}_c}(x, x+1) = 1$ est démultipliée dans l'espace diatonique par g. Ce phénomène a une incidence directe sur la représentation des échelles, l'ajout de la moindre altération contribuant de manière significative à l'élargissement de l'échelle sur la spirale diatonique, comme indiqué à la section 2.6.

La projection π_g transforme l'échelle diatonique, structure la plus compacte sur la spirale des quintes, en la structure la mieux répartie dans le cercle chromatique. Inversement, le cluster chromatique, structure la plus ramassée

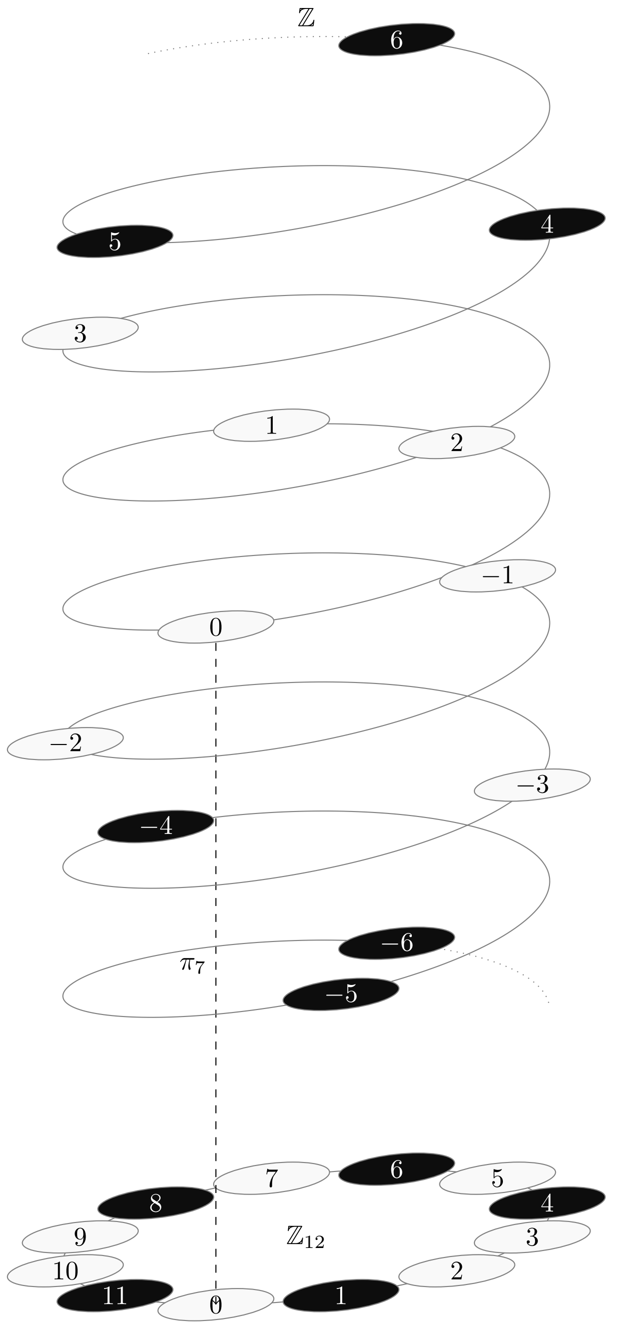

Figure 4. La projection π_7 de la spirale des quintes $\mathbb{Z}$ sur le cercle chromatique $\mathbb{Z}_{12}$. Les sept notes naturelles (touches blanches) apparaissent groupées au centre de la spirale (positions -3 à 3, alors qu'elles sont réparties à travers tout le cercle chromatique.

chromatiquement, est l'image de l'ensemble le mieux réparti sur la spirale des quintes.

Si les notes prises individuellement sont permutées, la forme de l'échelle prise dans son ensemble ne change pas sous l'action d'une translation le long de la spirale des quintes. Le solfège enseigne que chaque pas de quinte transpose l'échelle, comme l'indiquent les altérations présentes dans les armatures : *do* majeur, *sol* majeur, *ré* majeur, etc.

2.5. Symétrie du *ré*

Si d est impair, l'échelle $\mathcal{S}_1$ de taille d occupant toutes les positions autour de l'origine

$$\mathcal{S}_1 = \left\{ -\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor, \ldots, 0, \ldots, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \right\} \tag{4}$$

est générée par l'intervalle g sur le cercle chromatique :

$$S_1 := \left\{ \left[-\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \cdot g \right]_c, \ldots, [0 \cdot g]_c, \ldots, \left[+\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor \cdot g \right]_c \right\} \tag{5}$$

Elle induit une symétrie par inversion autour de la note centrale de cet enchaînement, de sorte qu'elle est *centrée* autour de l'origine :

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}_1} \xi = -\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor + \ldots + 0 \ldots + \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor = 0 \tag{6}$$

Les deux espaces, diatonique $\mathbb{Z}$ et chromatique $\mathbb{Z}_c$, sont reliés (figure 4) par la projection :

$$\begin{aligned} \pi_g : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}_c \\ \xi &\longmapsto [g \cdot \xi]_c \end{aligned} \tag{7}$$

qui, si les origines (0 respectivement $[0]_c$) sont identifiées avec l'axe de symétrie, est compatible avec la symétrie d'inversion.

$$\begin{array}{ccc} \xi & \xrightarrow[\pi_g]{} & [g \cdot \xi]_c \\ \big\downarrow {\scriptstyle \iota_{\mathbb{Z}}} & & \big\downarrow {\scriptstyle \iota_{\mathbb{Z}_c}} \\ -\xi & \xrightarrow[\pi_g]{} & [-g \cdot \xi]_c \end{array} \tag{8}$$

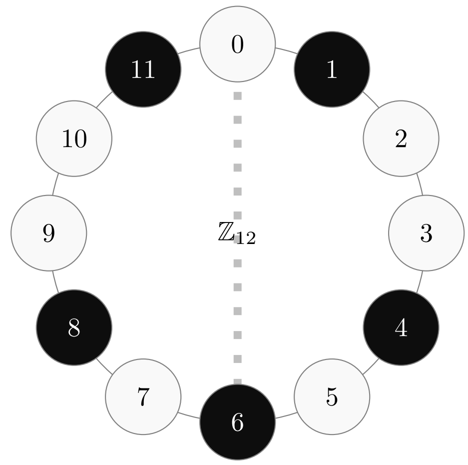

Figure 5. La symétrie de l'échelle diatonique (en blanc) autour du *ré* (0) apparaît sur le cercle chromatique, comme sur les claviers de piano, les portées en clef de *fa* (figure 1) ou encore la spirale des quintes (figure 4).

Toutes les échelles ne sont pas centrées. Mais, pour autant que la taille d'échelle d soit un nombre premier, il s'en trouve toujours une et une seule, au sein de chaque classe de transposition S, qui soit centrée sur le cercle chromatique :

$$\forall S, \quad \exists! \, [\delta]_c \in \mathbb{Z}_c : \sum_{[x]_c \in S} [x + \delta]_c = [0]_c \tag{9}$$

Les relations de symétrie se retrouvant dans les deux espaces par (8), une échelle centrée dans $\mathbb{Z}_c$ l'est aussi dans $\mathbb{Z}$. On choisit donc le représentant de la classe de transpositions sur la base de l'équation (9).

2.6. Étalement diatonique

Le centrage des échelles aligne toutes les échelles sur l'axe de symétrie de l'échelle de référence $\mathcal{S}_1$. Il devient alors possible de comparer leur étalement respectif le long de la spirale $\mathbb{Z}$, sans introduire des biais dûs aux décalages, de façon analogue au calcul de la variance de variables aléatoires centrées.

Pour une échelle $\mathcal{S} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\} \subset \mathbb{Z}$ donnée, l'indice d'étalement est donné par le vecteur I, qui classe dans l'ordre décroissant les valeurs absolues des coordonnées diatoniques de $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned} I : \mathbb{Z}^d &\longrightarrow \mathbb{N}^d \\ (\xi_1, \ldots, \xi_d) &\longmapsto I(\mathcal{S}) := (|\xi_{o(1)}|, \ldots, |\xi_{o(d)}|) \end{aligned} \tag{10}$$

où la fonction d'ordre $o : \{1, \ldots, d\} \to \{1, \ldots, d\}$ range les coordonnées ξ_k dans l'ordre décroissant :

$$|\xi_{o(k)}| \geq |\xi_{o(k+1)}|, \quad \forall k \in \{1, \ldots, d-1\}\,. \tag{11}$$

Ceci induit une relation d'ordre sur les sous-ensembles $\mathcal{S}$ de $\mathbb{Z}$ que l'on range par ordre alphabétique, les mots étant leurs vecteurs d'étalement $I(\mathcal{S})$. Soient deux vecteurs $I = (i_1, \ldots, i_d)$ et $I' = (i'_1, \ldots, i'_d)$; on définit la relation d'ordre linéaire

$$I < I' \iff \exists k \in \{1, \ldots, d\} : \begin{cases} i_k < i'_k, \text{ et} \\ i_j = i'_j, \forall j < k \end{cases} \tag{12}$$

que l'on peut appliquer à toute paire de sous-ensembles de $\mathbb{Z}$:

$$\mathcal{S} < \mathcal{S}' :\iff I(\mathcal{S}) < I(\mathcal{S}'). \tag{13}$$

2.7. Choix de la représentation

Sa symétrie et sa compacité sont les deux marques caractéristiques de l'échelle de référence $\mathcal{S}_1$. Toutes les autres échelles $\mathcal{S}$, pensées comme des déformations de $\mathcal{S}_1$, doivent être évaluées à l'aune de ces deux critères. Choisir comme représentant de la classe de transposition l'échelle centrée (9) conserve la symétrie originelle de $\mathcal{S}_1$. Il reste à choisir l'ensemble $\mathcal{S}$ dans la préimage ${\pi_g}^{-1}(S)$ qui s'approche le plus de la compacité originelle de $\mathcal{S}_1$.

Chaque représentation diatonique $\mathcal{S} = \{\xi_1, \ldots, \xi_d\}$ de l'échelle $S \subset \mathbb{Z}_c$ doit satisfaire les trois conditions suivantes :

1. Elle appartient à la préimage de la projection π_g :

$$S = \pi_g(\mathcal{S}) \tag{14}$$

2. Cette représentation est centrée autour de l'axe de symétrie. Les altérations doivent se compenser :

$$\sum_{\xi \in \mathcal{S}} \xi = 0 \tag{15}$$

3. Parmi tous les choix $\mathcal{X}$ compatibles avec les conditions (14) et (15), le représentant $\mathcal{S}$ est celui qui minimise l'étalement au sens de (12) :

$$I(\mathcal{S}) < I(\mathcal{X}) \tag{16}$$

Pour chaque échelle S, les contraintes (14) et (15) définissent une représentation centrée et la plus compacte $\mathcal{S}$, de façon unique (figure 6).

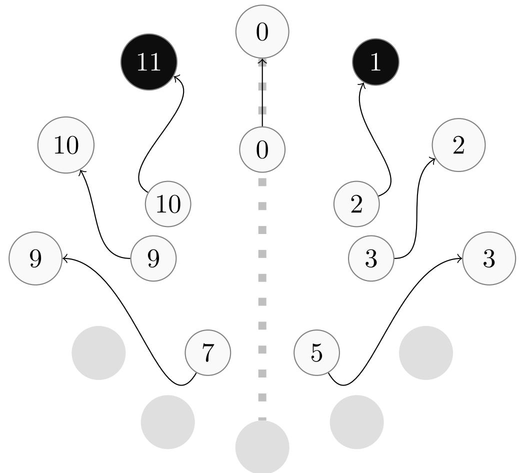

Figure 6. La construction d'un représentant $\mathcal{S}_{38}$ pour le cluster chromatique se fait par déformation minimale de l'échelle diatonique $\mathcal{S}_1$ (au centre). Les flèches (altérations) ne doivent pas se croiser, respecter le centrage, et engendrer des déplacements minimaux.

2.8. Ordre des échelles

Les mêmes critères de symétrie et de compacité qui ont servi à choisir le candidat $\mathcal{S}$ représentant le mieux l'échelle S sont appliqués à ces représentants pour les comparer entre eux. La relation d'ordre (12) appliquée au vecteur d'étalement des représentants centrés et compacts permet de ranger toutes les échelles. Soient deux représentations centrées et compactes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ des deux échelles S et S'

$$\mathcal{S} < \mathcal{S}' :\iff I(\mathcal{S}) < I(\mathcal{S}'). \tag{17}$$

L'échelle la plus compacte est l'échelle de référence $\mathcal{S}_1$ générée par l'intervalle d (équation 4). À l'opposé, le cluster chromatique

$$\mathcal{S}_N = \left\{ -\left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor (c-d), \ldots, 0, \ldots, \left\lfloor \frac{d}{2} \right\rfloor (c-d) \right\} \tag{18}$$

occupera les positions les plus éloignées les unes des autres.

3. INTERPRÉTER LES CLOCHES

Chaque échelle S est représentée par la position ξ de ses notes sur la spirale diatonique $\mathbb{Z}$. Ces coordonnées diatoniques identifient et caractérisent les échelles. L'utilité de la construction décrite à la section 2 vient de ce qu'elle trouve une interprétation pertinente du point de vue musical.

3.1. Liste des échelles

L'ordre des échelles défini en équation (12) oppose l'échelle diatonique au cluster chromatique. Sans pour autant définir globalement un degré progressif de diatonicité / chromaticité des échelles, on notera que, localement, la proximité entre deux échelles traduit une similitude dans la présence d'altérations des notes naturelles de l'échelle diatonique.

Le passage d'une échelle à l'autre se fait avec la plus grande parcimonie, à savoir en choisissant le moins d'altérations possibles, et en commençant par les plus proches de l'axe de *ré*.

Les altérations apparaissent ainsi progressivement en suivant l'ordre des armatures du solfège, et les altérations doubles n'apparaissent qu'après avoir épuisé toutes les simples. Cette parcimonie n'est pas sans rappeler les règles d'enchaînements d'accords, notamment celle du plus court chemin dans la conduite des voix.

3.2. Symétrie

La symétrie du *ré* correspond à l'opération d'inversion, comme si un miroir traversait cette note ou la touche qui lui correspond. L'ordre de tri (12) attribue un rang unique aux échelles symétriques ($\mathcal{S} = \iota_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S})$), mais elle accorde le même rang à deux échelles inverses l'une de l'autre ($\mathcal{S}' = \iota_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S})$), une similitude que la nomenclature musicale relève également en attribuant des noms similaires à l'échelle harmonique majeure et à l'échelle harmonique mineure.

Ce ne sont donc pas les classes de transposition que nous ordonnons le long de l'axe des échelles, mais des classes formées par l'action du groupe dihédral, qui identifie deux échelles inverses.

Cette opération a le mérite de rendre la représentation plus compacte et de souligner le lien qui unit deux échelles inverses l'une de l'autre. Si l'ensemble $\mathcal{S}$ n'est pas forcément symétrique, l'ensemble $\mathcal{S} \cup \iota_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S})$ le sera toujours. La cloche diatonique superpose les paires d'échelles inverses, ce qui confère un caractère symétrique la représentation dans son ensemble (Figure 2).

Un code de couleurs indique l'appartenance des notes aux échelles ainsi regroupées. Une couleur rose désigne les notes symétriques, soit celles communes à une échelle et à son inverse

$$\mathcal{S} \cap \iota_{\mathbb{Z}}(\mathcal{S}). \tag{19}$$

Elle s'applique à toutes les échelles entièrement symétriques, et aux notes communes aux deux échelles d'une paire symétrique. Le restant des notes, qui font partie d'une seule échelle asymétrique, est distingué par deux nuances de bleu, clair pour l'échelle tendant vers les bémols, foncé pour celle tendant vers les dièses.

3.3. Liste des modes

Jusqu'à présent, nous avons considéré les échelles comme de simples sous-ensembles de notes. Mais chaque note considérée individuellement définit la fondamentale d'un mode, défini ici par sa position ξ sur la spirale des quintes. Or il se trouve que, pour les premières échelles en tout cas, cette position correspond à une notion bien établie dans la théorie du jazz, à savoir le degré progressif de clarté ou d'obscurité d'un mode, qui est une généralisation du caractère majeur ou mineur des modes usuels. Deux modes partageant la même coordonnée diatonique, bien que faisant partie d'échelles différentes, présenteront un caractère similaire.

3.4. Carte des échelles et des modes

La combinaison de l'axe des échelles avec l'axe des positions des notes sur la spirale diatonique permet de construire une représentation bidimensionnelle de toutes les échelles et de tous leurs modes. Le fait que la proximité géographique traduise une proximité musicale donne tout son sens à cette démarche, ce que confirme par exemple l'agglutination des six échelles usuelles dans les cinq premières lignes de la cloche heptatonique, de même que la position des modes majeurs et mineurs. Cette représentation présente aussi des similitudes avec les cartes géographiques :

— Celle de localiser les objets d'un espace à la géométrie potentiellement plus complexe (en termes de courbure et du nombre de dimensions) le long de deux axes dans le plan.

— Celle d'identifier chaque mode au moyen d'une paire de coordonnées : appartenance à une échelle et caractère du mode, de la même façon que la latitude et à la longitude situent précisément n'importe quel point sur le globe.

Les 462 modes de la configuration habituelle des échelles heptatoniques prennent place sur un tableau de 38 lignes par 31 colonnes. Ces nombres augmentent considérablement pour certaines configurations microtonales (figure 7).

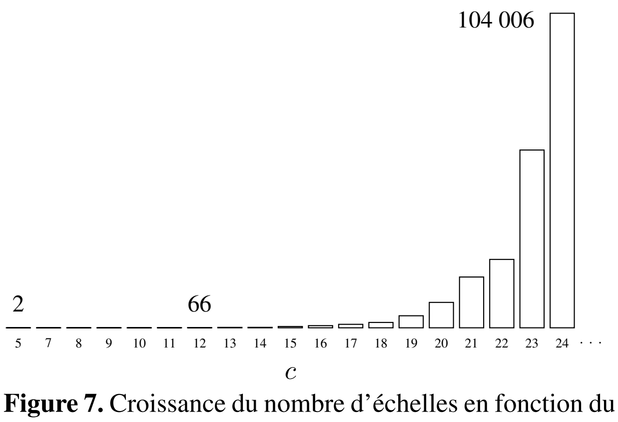

Figure 7. Croissance du nombre d'échelles en fonction du nombre de notes c dans l'octave.

4. ACCÉDER AUX MODES

Le système de la cloche diatonique s'appliquant à d'autres contextes (c, d) que les habituelles échelles heptatoniques $(12, 7)$ et pentatoniques $(12, 5)$, il permet de générer une collection de cartes pour divers mondes macroet microtonaux, et de les compiler en un atlas d'échelles et de modes. Cette masse d'information est stockée dans une base de données, accessible en ligne par les moyens habituels : visualisation, liens et moteur de recherche.

4.1. Identification

N'importe quel mode peut être identifié de façon univoque par sa structure intervallique. La séquence 2–1–2–2–2–1–2 renvoie par exemple au mode dorien, ou mode de *ré*, de l'échelle diatonique. Fort pratique pour le musicien, cette notation montre directement les intervalles à suivre pour jouer un mode, indépendamment de la tonalité et des transpositions. En revanche, il est plus difficile d'y lire des informations sur le contexte du mode. Le site de la cloche diatonique utilise un jeu de cinq coordonnées pour localiser un mode dans l'atlas. Chaque coordonnée détermine les valeurs que peuvent prendre les coordonnées suivantes dans la liste ci-dessous, des combinaisons arbitraires ne sont généralement pas possibles.

1. La division de l'octave en c notes indique de quel monde macro- ou microtonal il s'agit.
2. Le nombre de notes d de l'échelle indique le système d'échelles utilisées.
3. Le rang de l'échelle n indique à quelle classe dihédrale l'échelle appartient, et si l'on se situe plus près de l'échelle diatonique ou du cluster chromatique.
4. La symétrie de l'échelle p distingue les différents membres de la classe dihédrale : échelle entièrement symétrique (0), ou paire claire (-1) / foncée $(+1)$.
5. La coordonnée diatonique ξ distingue les différents modes d'une même échelle.

4.2. Navigation

Le site de la cloche diatonique permet de naviguer entre les modes de trois manières différentes, selon les fonctionnalités communément offertes par les bases de données.

4.2.1. *Organisation hiérarchique*

Les coordonnées de la section 4.1 définissent une organisation hiérarchique des modes, allant du général au particulier.

1. Choisir dans l'atlas un monde ou contexte musical.
2. Parcourir la carte et choisir une échelle et son mode.

L'exploration des cartes donne accès à la consultation de tous les modes, sans devoir fournir préalablement d'autres informations que le nombre de notes divisant l'octave et contenues dans l'échelle (figure 8).

4.2.2. *Fonctions de recherche*

Si l'on se fait déjà une idée plus précise du mode que l'on cherche, il est possible d'interroger la base en utilisant les requêtes par :

— Nom du mode, pour autant qu'il soit répertorié.

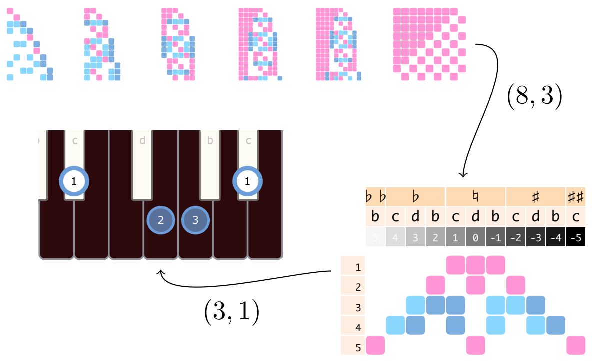

Figure 8. Étapes successives de la navigation hiérarchique sur le site. Sélection d'une carte au sein de l'atlas : ici celle des échelles de 3 notes dans une octave divisée en 8 notes. Puis, sélection d'une échelle et d'un mode sur la carte : l'échelle 3+ et son mode numéro 1.

```
dorien, lydien ♯5 ♯6, etc.
```

— Structure intervallique, partielle (préfixe) ou complète.

```
2-1-2-2-2-1-2, 1-1-1-2-1..., etc.
```

— Liste de classes de hauteur.

```
0 2 4 5 7 9 10, 0 1 3 7 23, etc.
```

— Numéros de notes.

```
1 2 b3 4 5 6 b7, etc.
```

En recherche avancée, un clavier permet également de composer une échelle en sélectionnant les notes.

4.2.3. *Relations entre modes*

La notice de chaque mode affiche son contexte local. Ceci comprend :

— les modes voisins sur la carte ;

— le mode symétrique (inverse) $\xi \mapsto -\xi$;

— le mode complémentaire, s'il existe $\mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}^c$;

— tous les modes voisins dans la cloche et les échelles symétriques ou complémentaires, s'il y en a.

5. REPRÉSENTER LES MODES

Parcourir facilement ce vaste corpus de modes est une chose, se représenter les modes visités en est un autre. C'est pour accomplir cette tâche qu'interviennent les outils de visualisation et d'écoute proposés par ce site.

La structure intervallique est une description certes utile mais trop aride des modes. Pour en révéler le potentiel musical et faciliter la comparaison de leurs qualités respectives, il est nécessaire de recourir à des représentations plus intuitives et engageantes, et qui soient surtout familières à un public venu de la musique. Présenter de la façon la moins déconcertante possible des structures musicales inhabituelles, telle est l'intention qui a motivé les choix présentés dans cette section.

5.1. Claviers

Le clavier traditionnel du piano présente deux qualités que l'on peut généraliser à d'autres tempéraments.

1. Les touches blanches représentent les notes *naturelles* de l'échelle la *mieux répartie* $\mathcal{S}_1$, en l'occurrence l'échelle *diatonique*.
2. Les touches noires, complément $\mathbb{Z}_{12} \setminus \mathcal{S}_1$ de l'échelle de référence, ne sont jamais contiguës, alors que deux touches blanches peuvent être voisines l'une de l'autre.

Ces conditions répondent à des exigences d'ergonomie pour les pianistes. La construction d'un clavier suivant ces principes devient possible pour autant que l'on dispose d'une échelle de référence ayant les bonnes propriétés.

C'est précisément ce qu'offrent les échelles les mieux réparties, qui distribuent les notes à travers le total chromatique de la façon la plus régulière possible en évitant d'agglutiner les touches noires [2]. Dans le contexte d'une cloche diatonique, l'existence et l'unicité d'une telle échelle est garantie car l'échelle générée $\mathcal{S}_1$ est justement la mieux répartie.

Une telle configuration, appelée *clavier diatonisé*, avait déjà été proposée par Erwin Wilson dans la deuxième partie du XX^e siècle, notamment pour des octaves de 13 notes [5, p. 60]. Elle est généralisée ici à toutes les divisions de 5 à 24 notes.

La condition 2 n'est toutefois réunie que si l'échelle occupe la majorité des notes de l'octave. Dans le cas des échelles pentatoniques par exemple, il est impossible de loger les sept touches noires du complément entre les cinq touches blanches de l'échelle pentatonique sans collision.

Si l'on reprend le clavier du piano, il se trouve justement que les touches noires forment également une échelle la mieux répartie, et que ces touches peuvent servir à accueillir les notes *naturelles*[4]. Il suffit d'inverser le rôle des touches blanches et noires, en considérant les notes des touches blanches comme des altérations des notes des touches noires. Par exemple, *fa* est alors considéré comme le bémol de la note située sur la touche noire à sa droite (figure 10).

5.2. Modes

Un clavier diatonique est un support commun à toutes les échelles et à tous les modes d'un même monde (c, d). Il fournit donc le cadre idéal pour comparer les différents modes entre eux. La représentation de chaque pas sur les touches d'un clavier parlera évidemment aux pianistes, mais elle a l'avantage, par rapport à la notation traditionnelle sur portée, d'être universelle (figure 11). On évite ainsi de devoir imaginer un nouveau symbole pour noter chaque micro-altération possible.

[4]À condition que le cardinal du complément $c - d$ soit également premier avec la taille de l'octave c, ce qui est toujours le cas car c et d sont déjà premiers entre eux.

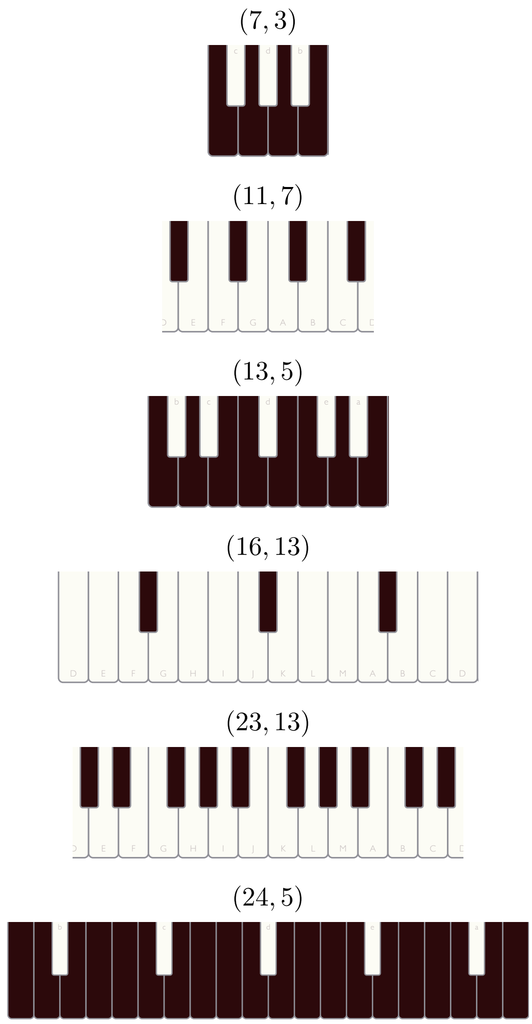

Figure 9. Exemples de claviers diatoniques disponibles sur le site pour différentes combinaisons de taille d'échelle et d'octave (c, d). Les touches de couleur blanche contiennent toujours l'échelle de référence. L'inversion de couleurs par rapport au clavier traditionnel se produit lorsque les échelles ne contiennent pas la majorité des notes.

5.3. Perception musicale

La visualisation d'un mode facilite la compréhension de certaines structures, mais seule son écoute peut révéler ce qu'il a à offrir musicalement. C'est pourquoi les claviers de la cloche diatonique peuvent être joués. Cliquer sur une touche du clavier permet d'entendre la note correspondante.

On peut être surpris à l'écoute de *Préludes* pour piano en quarts de tons de Wyschnegradsky, alors que la musique pour gamelans balinais séduit immédiatement le public occidental, pourtant peu habitué à ces notes qui n'ont rien à voir avec les douze notes du tempérament égal.

La différence réside dans le timbre des instruments utilisés. Il y a certes un phénomène d'accoutumance, mais le piano a d'abord été développé pour nos accordages européens, alors que le timbre métallique des gamelans épouse en quelque sorte les gammes sur lesquelles on le joue [9].

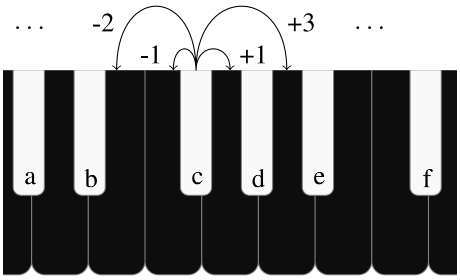

Figure 10. Le clavier complémentaire des échelles pentatoniques. L'échelle pentatonique prend le rôle de l'échelle diatonique, et le *sol*♯ / *la*♭ celui de centre de symétrie tenu par le *ré*. Les chiffres indiquent les altérations nécessaires pour obtenir les touches complémentaires. En vue de la généralisation aux contextes microtonaux, nous nommons cette note d, par analogie avec le D, mais les minuscules rappellent que l'on n'identifie pas la hauteur des notes mais décrit leur ordre par rapport à l'axe de symétrie. On notera que D est aussi le centre de l'échelle pentatonique *la*, *do*, *ré*, *mi*, *sol*, qui correspond à la configuration des touches noires du clavier traditionnel, transposée d'un triton.

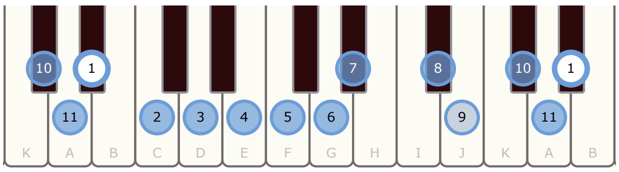

Figure 11. Le mode 2–2–2–1–2–1–3–1–2–1–1 représenté sur un clavier diatonique. Ce mode est situé sur la coordonnée diatonique 8, occupe la 20e position sur 912 dans l'étalement des échelles de 11 notes dans une octave de 18 notes (tiers de ton).

Une présentation tout à fait convaincante faite par Thomas Noll de ce principe [5] a orienté la conception des sons utilisés sur le site. Chaque division de l'octave c comporte son propre lot de notes, réparties sur cinq octaves, soit un total de près de 3000 fichiers de sons.

Suivant l'hypothèse que la sensation de dissonance provient de la friction entre les partiels de différentes notes jouées simultanément, une idée déjà formulée par Helmholtz dans son étude de la consonance [4], on ajuste les partiels du timbre de sorte à les faire correspondre à la hauteur des c notes divisant l'octave.

Dans un tempérament égal, l'ensemble des fréquences relatives des notes d'une octave divisée en c est définie par

$$S_c := \left\{ 2^{\frac{k}{c}} | k \in \mathbb{N}^* \right\} \tag{20}$$

alors que le timbre harmonique est une simple suite de fréquence entières

$$H := \{k | k \in \mathbb{N}^*\}. \tag{21}$$

La déformation du timbre harmonique H en un timbre

[5] Une collaboration avec Andrew Milne dont les synthétiseurs microtonaux peuvent être téléchargés depuis `dynamictonality.com`, accédé le 19 octobre 2020.

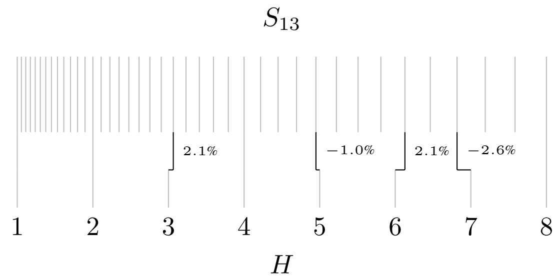

Figure 12. Ajustement des premières harmoniques H aux hauteurs des 13 notes de l'octave $\mathbb{Z}_{13}$ dans l'octave, sur une échelle de fréquence relative. La fondamentale et les trois premières octaves (1, 2, 4 et 8) ne sont pas affectées. Les pourcentages indiquent les corrections de fréquence par rapport au spectre harmonique.

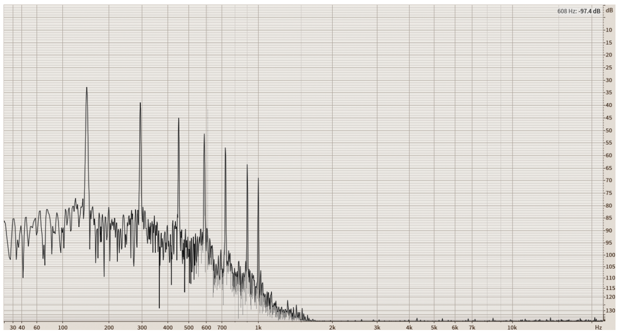

Figure 13. Spectrogramme d'un timbre inharmonique utilisé pour jouer les notes dans les octaves de 13 notes. La fondamentale est le *ré* 3, située à 147 Hz. Suivent six partiels situés respectivement à 294, 450, 587, 727, 890 et 1001 Hz.

inharmonique s'opère en désaccordant chaque harmonique f_k vers la note s de l'échelle la plus proche :

$$f_k := \operatorname*{argmin}_{s \in S_c} d_{\mathbb{R}}(s, k), \quad k \in \mathbb{N}. \tag{22}$$

Les sons ainsi produits par synthèse additive, ne présentent plus un timbre harmonique, mais un caractère plus métallique convenant mieux à l'échelle choisie (figure 13). Les harmoniques contribuant à la sensation de hauteur, leur altération pourrait nuire à la perception des notes. Mais comme les échelles utilisées sont octaviantes, les harmoniques situées sur des octaves (toutes les puissances de 2) sont intactes, et contribuent à renforcer cette perception (figure 12).

6. CONCLUSION

Le site de la cloche diatonique, conçu comme un atlas des modes et des échelles, offre des moyens de navigation et de visualisation des échelles et modes microtonaux. Il permet de s'orienter, d'étudier leur structure et de les entendre. Les outils proposés se fondent sur une extension des principes régissant le solfège du monde connu à l'ensemble de la *terra incognita* des quelque cinq millions et demie de modes recensés sur le site.

La structure des cartes de l'atlas, en forme de cloche, se fonde sur le solfège traditionnel. Ainsi la disposition des modes heptatoniques usuels y reflète-t-elle la nomenclature de la Berkeley School of Music, ce qui lui confère une vertu pédagogique certaine, ce système s'étant établi comme le plus cohérent pour nommer ces modes.

6.1. Limitations

Toutes les divisions de l'octave c, de $c = 5$ à $c = 24$, les quarts de tons, sont couvertes. En revanche, toutes les tailles d'échelle d ne sont pas disponibles. La raison en est les limitations aux combinaisons possibles de c et d, décrites à la section 2. Elles sont résumées ci-dessous :

1. $0 < d < c$. Les échelles doivent être des sous-ensembles stricts et non vides du total chromatique.
2. $(c, d) = 1$. Existence d'une échelle de référence générée par d.
3. d est impair (la symétrie ι passe par l'origine).
4. d est premier (existence d'un représentant centré).

6.2. Questions ouvertes

La tentation est grande d'étendre les notions et interprétations du solfège traditionnel à tous les autres modes, en se laisser guider par les axes de clarté / obscurité des modes et le degré d'altération des échelles. A ce stade toutefois, il n'est pas clair si la lecture de la cloche, comme illustration assez idéale du solfège, reste pertinente pour ces modes *exotiques*.

En effet, l'opération d'enrichissement des classes de hauteur par une structure diatonique pourrait atteindre ses limites avec l'apparition du phénomène d'enharmonie. Tant qu'on reste en deçà des points sur lesquels la spirale se referme en cycle, les deux espaces, chromatique et diatonique, partagent une topologie commune. Au-delà, la prudence est de mise. Pierre Audétat a relevé ce problème qu'il appelle la *barrière enharmonique* en observant que les échelles heptatoniques numéro 6, les premières à contenir le *sol*♯ et le *la*♭, sont aussi les premières à ne plus faire partie du canon des modes *usuels*. La même question se pose pour les échelles micro-tonales : cette structure du solfège est-elle universelle et généralisable à d'autres tempéraments ?

Ces questions reviennent à poser celle, plus profonde, de la structure et de la valeur de notre système musical traditionnel. Quels sont les ingrédients de son succès ? D'autres systèmes partageant les mêmes propriétés offrent-ils un contexte aussi fécond à la création musicale ?

Un autre problème, tout à fait pratique, est posé par la combinatoire. Comment savoir quel mode parmi les millions disponibles sera le plus adapté à une intention musicale donnée ? De nombreuses personnes ont consacré leur vie à l'apprentissage des 42 modes usuels avant de passer maître dans l'art de leur utilisation. Comment imaginer alors décortiquer plusieurs millions de modes ? Comment trouver l'aiguille dans la botte de foin ?

Le modèle présenté ici n'a pas vocation à trancher ces interrogations fondamentales. En revanche, sa principale valeur est d'encourager l'expérimentation musicale et de donner matière à réflexion. Les cloches diatoniques ont été conçues comme une invitation au voyage, ouvrant sur l'exploration et la création musicale. Des pistes suggèrent qu'elles sélectionnent des modes musicalement *pertinents*, comme semblent l'indiquer certains exemples musicaux de transformations qui suivent les relations entre modes de la cloche.

7. RÉFÉRENCES

[1] Carter, E., Hopkins, N., Link, J. F. *Harmony Book*. Carl Fischer, New York, 2002.

[2] Clough, J., Douthett, J. « Maximally even sets », *Journal of Music Theory* 35/1 (1991), p.93-173.

[3] Forte, A. *The Structure of Atonal Music*. Yale University Press, New Haven, 1973.

[4] von Helmholtz, H. *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*. Vieweg, Braunschweig, 5. Auflage, 1896.

[5] Jedrzejewski, F. *Dictionnaire des musiques microtonales*. L'Harmattan, Paris, 2014.

[6] Junod, J., Audétat, P., Agon, C., Andreatta, M. « A generalisation of diatonicism and the discrete Fourier transform as a mean for classifying and characterising musical scales », *Mathematics and Computation in Music*, Chew, E., Childs, A., Chuan, C.-H. (dir.), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2009.

[7] Lateef., Y. A. *Repository of Scales and Melodic Patterns*. Fana Music, 1981.

[8] Pólya, G. Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen. *Acta Mathematica* 68 (1937), p. 145-254.

[9] Sethares, W. A. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. Springer, London, 2nd ed., 2005.

Texte édité par Corentin Guichaoua.